Théorème de Müntz

Théorème : Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante. On pose $\mathcal{E} = (\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})), ||.||_2)$, qui est un Hilbert pour le produit scalaire associé standard. Si $k \in \mathbb{N}$ on note f_k la fonction définie par

$$f_k : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{a_k} \end{array}.$$

Alors la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne dans $\mathcal{E}$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{a_k}$ diverge.

Lemme 1 : On note $\Delta_N(m) = \inf_{f\in E_N} ||x_m - f||_2$ où $E_N = \text{Vect}(f_1, ..., f_N)$. Alors $\Delta_N(m)^2 = \dfrac{G(f_1, ..., f_N, x_m)}{G(f_1, ..., f_N)}$ où $G(f_1, ..., f_N) = \det(\langle f_i, f_j\rangle)_{1\leq i,j\leq N}$ est un déterminant de Gram et x_m est l'application $x \mapsto x^m$.

Remarque : Pour des soucis de notation, dans la suite on utilisera la notation de Gram pour désigner le déterminant mais aussi la matrice associée.

Lemme 2 (admis): On appelle déterminant de Cauchy un déterminant de la forme $\delta = \det\left(\dfrac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.
On a alors la formule

$$\delta = \frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_i - a_j)\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(b_i - b_j)}{\prod\limits_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}.$$

Preuve du lemme 1: Comme E_N est un convexe fermé (car de dimension finie) il existe un unique projeté de x_m sur E_N que l'on note $p(x_m)$. On écrit alors $x_m = y + z$ où $y = p(x_m)$, $z = (x_m - p(x_m))$. On remaque que z est dans $E_N^{\perp}$. En développant on trouve alors $||x_m||_2^2 = ||y||_2^2 + ||z||_2^2$.

$$G(f_1, ..., f_N, x_m) = \begin{pmatrix} & & \langle f_1, x_m\rangle \\ & G(f_1, ..., f_N, x_m) & \vdots \\ \langle x_m, f_1\rangle & \dots & ||y||_2^2 + ||z||_2^2 \end{pmatrix}$$

Comme le déterminant est linéaire par rapport à la dernière colonne, $G(f_1, ..., f_N, x_m) = \det(P) + \det(Q)$ où

$$P = \begin{pmatrix} & & \langle f_1, x_m\rangle \\ & G(f_1, ..., f_N, x_m) & \vdots \\ \langle x_m, f_1\rangle & \dots & ||y||_2^2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & G(f_1, ..., f_N, x_m) & \vdots \\ 0 & \dots & ||z||_2^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de P vaut en fait 0 car $y \in E_N$ donc il est combinaison linéaire des $f_1, ..., f_N$. Cette même combinaison linéaire nous donne une relation linéaire entre la dernière colonne de P est les N premières. La matrice n'est donc pas inversible. En développant par rapport à la dernière colonne il vient que $\det(Q) = ||z||_2^2$. Par définition du projeté orthogonal, cela est suffisant pour conclure la preuve du lemme. $\square$

Preuve du théorème On vient de montrer que $\Delta_N(m)^2 = \dfrac{G(f_1, ..., f_N, x_m)}{G(f_1, ..., f_N)}$. De plus, $\langle f_i, f_j \rangle = \displaystyle\int_0^1 x^{a_i+a_j} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{a_i + a_j + 1}$. On a donc un déterminant de Cauchy (en posant $b_j = a_j + 1$). En vertu du lemme 2 on obtient alors

$$G(f_1, ..., f_N) = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq N} (a_i - a_j)^2}{\displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq N} (a_i + a_j + 1)}$$

et

$$G(f_1, ..., f_N, x_m) = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq N} (a_i - a_j)^2 \prod_{i=1}^{N} (a_i - m)^2}{(2m+1) \displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq N} (a_i + a_j + 1) \prod_{i=1}^{N} (a_i + m + 1)^2}$$

d'où

$$\Delta_N(m)^2 = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i - m)^2}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i + m + 1)^2}.$$

Montrons que la condition est nécessaire : Si $\overline{E} = \mathcal{E}$ (où $E = \bigcup E_n$), on peut se donner m réel strictement positif différent de tous les a_i. Comme $x_m \in \mathcal{E}$ on sait que $(\Delta_N(x_m))_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée et alors la condition est évidemment vérifiée. Sinon, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = +\infty$. Pour n suffisamment grand ($a_{n_0} > m$ par exemple) on a $\log\left(\dfrac{a_n - m}{a_n + m + 1}\right) \sim -\dfrac{-2m+1}{a_n + m + 1} \sim -\dfrac{-2m+1}{a_n}$. On conclut avec le théorème de comparaison des séries divergentes.

Elle est aussi nécessaire : Grâce au théorème de Weierstrass il suffit de montrer que si $\sum \dfrac{1}{a_k}$ diverge alors x_m est dans $\overline{E}$ pour tout entier m. Si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée sa croissance implique sa convergence vers une limite réelle $l \in \mathbb{R}$. Ainsi $\dfrac{a_n - m}{a_n + m + 1}$ converge vers $\dfrac{l - m}{l + m + 1}$ qui est de module strictement inférieur à 1. On montre alors sans trop de soucis que le produit des $\dfrac{a_n - m}{a_n + m + 1}$ tend vers 0. Sinon, la suite n'est pas majorée donc l'équivalent calculé précédemment est encore vrai et on a alors $\lim\limits_{N \to +\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = -\infty$ d'où $\Delta_n(m)$ tend vers 0, ce qui est suffisant pour conclure. $\square$

Pré-requis importants : Il faut être à l'aise sur

- Les théorème de projection et ce qui va avec (décomposition de l'espace avec un espace et son orthognal etc.)
- Le théorème de Weierstrass
- Connaître la preuve du déterminant de Cauchy est évidemment mieux mais on peut admettre ne pas savoir je pense